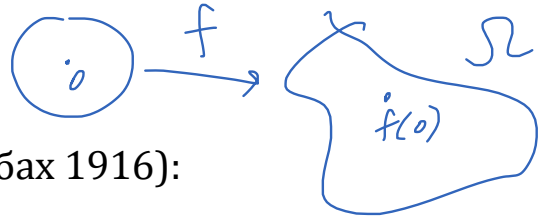


Оценки производной конформных отображений на выпуклые и звездообразные области

Пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ — конформное отображение на односвязную область Ω , с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.



Классическая теорема об искажении (Биберах 1916):

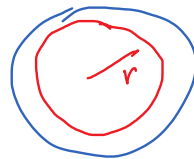
$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}, \quad 0 < |z| < 1$$

Эти поточечные оценки являются наилучшими, с равенством для функции Кёбе $k(z) = z/(1 - z)^2$ где $k'(z) = (1 + z)/(1 - z)^3$.



С интегральными оценками ситуация сложнее. Для голоморфной функции g положим

$$M_p(r, g) = \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi}$$



По теореме Бернштейна, для всякой однолистной f имеем

$$M_p(r, f) \leq M_p(r, k) \quad \text{при любом } p > 0$$



Однако для производных подобное неравенство $M_p(r, f') \leq M_p(r, k')$ неверно при $0 < p < 1/3$ и вообще говоря, неизвестно при $p \geq 1/3$.

Почему здесь появляется $1/3$? Подсчёт показывает, что

$$\sup_{0 < r < 1} M_p(r, k') < \infty \quad \text{при } 0 < p < 1/3, \text{ то есть } k' \in H^p$$

С другой стороны, существуют однолистные функции с $f' \notin H^p$ ($p > 0$).

$p > 1/3$?

Такого противоречия нет при $p > 1/3$, поскольку интегральные средние растут как \rightarrow

$$M_p(r, k') = \underline{\underline{\Theta}}((1-r)^{1-3p})$$

$$\int_{|z|=r} \left| \frac{1+z}{(1-z)^3} \right|^p \approx \int_{|z|=r} \frac{1}{|1-z|^{3p}}$$

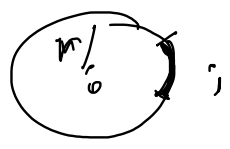
$r \rightarrow 1$

$\frac{1}{|1-z|^{3p}} \approx (1-r)^{-3p}$

конечно $|\arg z| < \pi$

$$C(1-r)^{1-\alpha} \leq \int_{|z|=r} \frac{1}{|1-z|^\alpha} \leq C(1-r)^{1-\alpha}$$

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{|1-z|^\alpha} = \Theta[(1-r)^{1-\alpha}]$$



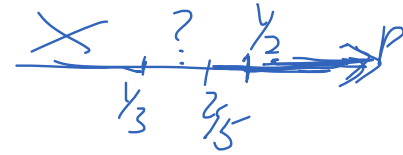
Интегральный спектр при $p > 0$

$f \in S \Rightarrow \underline{f(0)=0} \quad \underline{f'(0)=1}$

Теорема (Feng & MacGregor, 1976): при $p > 2/5$ имеем

$M_p(r, f') \leq C(p) M_p(r, k')$

0.4



То есть, оценка оптимальная по порядку, $M_p(r, f') = O((1-r)^{1-3p})$

Для $0 < p \leq 2/5$ они получили $M_p(r, f') = O((1-r)^{\epsilon-p/2})$

Просто доказывается случай $p > 1/2$ на основе логарифмической формы теоремы искажения:

$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$

$|f'|^p \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^p \left| \frac{f(z)}{z} \right|^p$

А именно,

$M_p(r, f') \leq \frac{C}{(1-r)^p} M_p(r, f) \leq \frac{C}{(1-r)^p} M_p(r, k) = O((1-r)^{1-3p})$

Бернштейн

$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad |k(z)| \approx \frac{1}{(1-z)^2}$

$M_p(r, k) = (1-r)^{1-2p}$

Как следствие, отметим, что при $0 < p < 2/3$ сходится интеграл

$\int_0^1 M_p(r, f') r dr \leq \int_0^1 (1-r)^{1-3p} r dr \quad -1 < 1-3p$

То есть, функция $|f'|^p$ интегрируема по кругу \mathbb{D} при $0 < p < 2/3$, и это точный интервал положительных степеней.

$1/2 < p < 2/3$

$p > 0$

$\forall f \in S \quad \iint_{\mathbb{D}} |f'|^p < \infty \quad ? \Leftrightarrow$

$p \in (0, 2/3)$

$k(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3} \sim \frac{1}{(1-z)^3}$

Как отметил Elhosh (1987), из теоремы де Бранжа следует точное неравенство $M_p(r, f') \leq M_p(r, k')$ при $p = 2, 4, 6, \dots$

Действительно, неравенство между коэффициентами функций f и k переносится на их производные и далее на целые степени производных. Затем применяется тождество Парсеваля.

$f(z) = \sum c_n z^n$

$k(z) = \sum n z^{n-1}$

$$f(z) = \sum c_n z^n$$

$$k(z) = \sum n z^{n-1}$$

$$|c_n| \leq n$$

$$f'(z) = \sum n c_n z^{n-1}$$

$$k'(z) = \sum n^2 z^{n-1}$$

$$(f')^m = \sum \{ \square \}$$

$$\leq (k')^m =$$

Интегральный спектр при $p < 0$

Также представляют интерес оценки $M_p(r, f')$ при $p < 0$, которые контролируют **сжатие** вместо растяжения области.

Из поточечного неравенства

$$|f'(z)|^{-1} \leq \frac{8}{1 - |z|}$$

следует, что $M_p(r, f') = O((1 - r)^{-p})$ для всех $p < 0$, но эта оценка не является точной.

Она показывает, что при $-1 < p < 0$ сходится интеграл

$$\int_0^1 M_p(r, f') r dr$$

То есть, функция $|f'|^p$ интегрируема по кругу \mathbb{D} при $-1 < p < 0$, но это **неточный** интервал отрицательных степеней. Последнее отметил Brennan (1978) который расширил интервал до $(-1 - \epsilon < p < 0)$ и сформулировал гипотезу, до сих пор недоказанную, что точным интервалом является $(-2, 0)$.

Гипотезу Бреннана можно переформулировать в терминах функции

$$B(p) = \inf \left\{ \beta : M_p(r, f') = O\left((1 - r)^{-\beta}\right) \right\}$$

(Имеется в виду оценка для всех однолистных функций.)

Например, $B(p) = 3p - 1$ при $p \geq 2/5$.

Поскольку $M_p(r, k') = \Theta((1 - r)^{1+p})$ при $p < -1$, имеем $B(p) \geq |p| - 1$

Гипотеза Бреннана равносильна утверждениям:

(a) $B(-2) = 1$

(b) $B(p) = |p| - 1$ при $p \leq -2$.

Теорема (Carleson & Makarov, 1994): (b) верно для достаточно больших значений $|p|$ ($p < 0$) и неверно для $-2 < p < 0$.

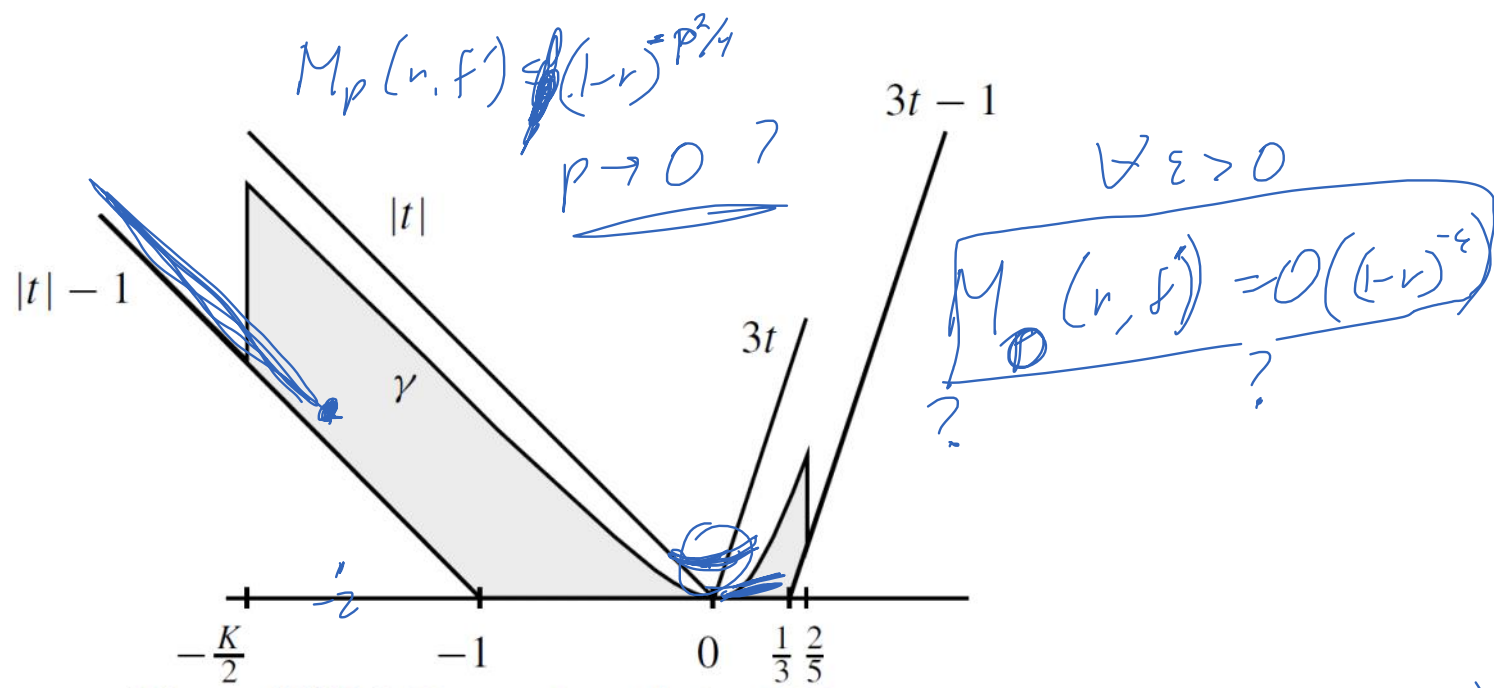


Figure VIII.3 Known bounds for $B(t)$.

(Из книги Garnett & Marshall, *Harmonic Measure*)

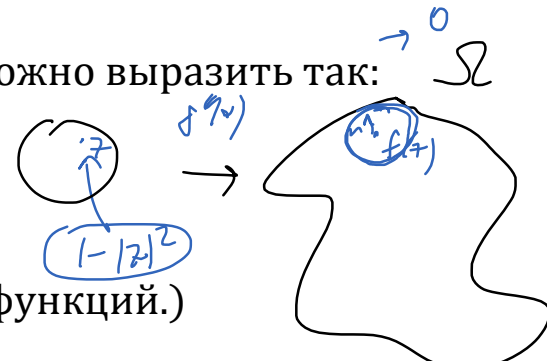
Роль геометрии области

Если область $\Omega = f(\mathbb{D})$ ограничена, то верхняя оценка производной меняется с $|f'(z)| = O((1 - |z|)^{-3})$ на $|f'(z)| = o((1 - |z|)^{-1})$ как следствие теоремы о покрытии и леммы Шварца.

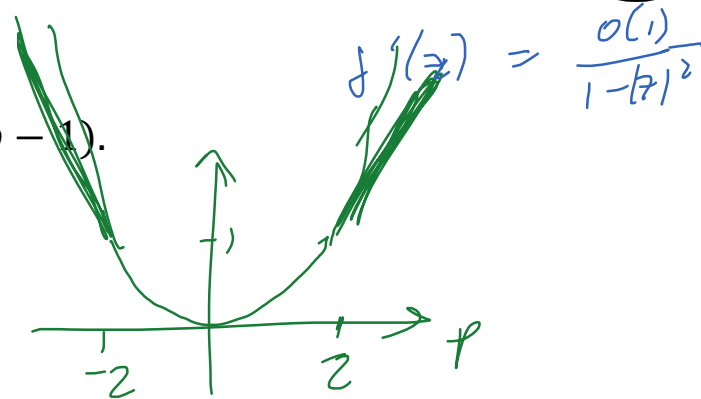
Ситуация с оценками сжатия не меняется. Это можно выразить так: пусть

$$B_b(p) = \inf \left\{ \beta : M_p(r, f') = O\left((1 - r)^{-\beta}\right) \right\}$$

(Оценка для всех **ограниченных** однолистных функций.)



[Макаров, 1998]: $B(p) = \max(B_b(p), 3p - 1)$.



Гипотеза "BCJK" (Brennan-Carleson-Jones-Kraetzer): $B_b(p) = p^2/4$ для всех $|p| \leq 2$.

И тогда как следствие, $B_b(p) = |p| - 1$ для $|p| > 1$. Поскольку наклон графика не превышает 1.

Пространства Харди

Норма Харди голоморфной функции g :

H^p

$$\|g\|_p = \sup_{0 < r < 1} M_p(r, g)^{1/p}$$

Чтобы производная конформного отображения принадлежала такому пространству, нужны геометрические предположения об $\Omega = f(\mathbb{D})$. Классические результаты таковы:

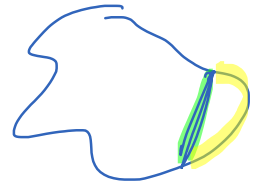
Теорема [F & M Riesz, 1916] $f' \in H^1 \Leftrightarrow \Omega$ имеет спрямляемую границу. Более того, норма вычисляется из длины границы.

$$\sup_{|z|=r} \int |f'| \quad \leftrightarrow \quad \frac{\ell(\partial\Omega)}{2\pi} = \|f'\|_{H^1}$$

Теорема [Kellogg 1929] Ω имеет границу гладкости $C^{1,\alpha} \Rightarrow f' \in H^\infty$ (более того, f' непрерывна в замкнутом круге).

$\alpha > 0$

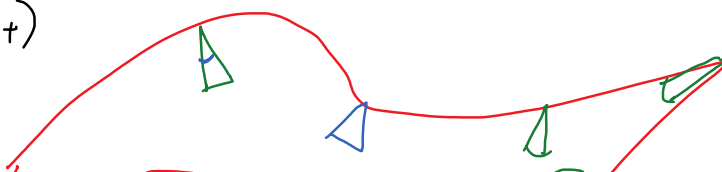
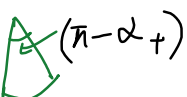
Здесь явной оценки нет.

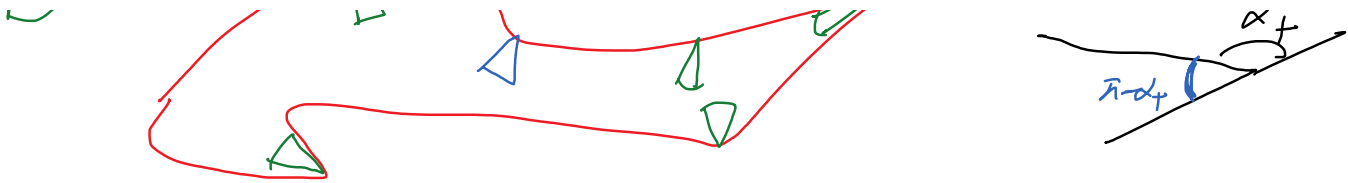


В пространстве между этими результатами можно отметить:

- [Warschawski & Schober, 1966; на основе теоремы Лаврентьева, 1936] Если Ω ограничена кривой Лаврентьева, то $f' \in H^p$ для некоторого $p > 1$
- [Warschawski & Schober, 1966] Предположим, что Ω ограничена кривой с касательным вектором ограниченной вариации, с резкими поворотами не более α_+ влево и не более α_- направо. Тогда $f' \in H^p$ при $p < \pi/\alpha_+$ и $1/f' \in H^p$ при $p < \pi/\alpha_-$ (точные интервалы)

Гипотеза [Fitzgerald & Lesley, 1986]: вместо ограниченной вариации, достаточно потребовать условия внутренних (внешних) секторов размера $\pi - \alpha_+$ (соответственно, $\pi - \alpha_-$)





Gaier (1962) дал явные оценки для $\|f'\|_p$ и $\|1/f'\|_p$ при условии звездообразности: область ограничена кривой с полярным уравнением $r = \rho(\theta)$ где $\log \rho$ удовлетворяет условию Липшица с константой L , причём $p < \pi/(2 \operatorname{atan} L)$.

Работа Гайера была практически забыта, но в последние годы такого рода оценки понадобились в математической физике. Ссылки на статью:

MR4156612 Reviewed Hassainia, Zineb; Masmoudi, Nader; Wheeler, Miles H. Global bifurcation of rotating vortex patches. *Comm. Pure Appl. Math.* 73 (2020), no. 9, 1933–1980. (Reviewer: Piotr Biler) [35Q31](#) ([76B47](#))
[Review PDF](#) | [Clipboard](#) | [Journal](#) | [Article](#) | [7 Citations](#)

MR3936982 Reviewed Lotoreichik, Vladimir; Ourmières-Bonafos, Thomas A sharp upper bound on the spectral gap for graphene quantum dots. *Math. Phys. Anal. Geom.* 22 (2019), no. 2, Paper No. 13, 30 pp. (Reviewer: Michael A. Perelmuter) [35P15](#) ([58C40](#) [81V65](#))
[Review PDF](#) | [Clipboard](#) | [Journal](#) | [Article](#) | [4 Citations](#)

Выпуклые области

Геометрию выпуклой области Ω опишем тремя радиусами:

- $\Omega \subset D(0, R_0)$
- $D(0, R_I) \subset \Omega$
- $\Omega = \cup_a D(a, R_C)$

Тогда конформное отображение на Ω с $f(0) = 0$ удовлетворяет

$\forall z \in \Omega$

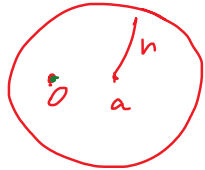
$$|f'| \leq R_C \exp\left(2(R_0 - R_C) \frac{\log R_I - \log R_C}{R_I - R_C}\right)$$

(Ковалёв 2016).

Например, если $\Omega = D(a, r)$ где $0 < a < r$, получаем

$$|f'| \leq \frac{r^3}{(r-a)^2}$$

(неточная оценка)



$$f(0) = 0$$



Donohue (2021) получил $|f'| \leq R_C \exp(2F(R_0, R_I, R_C))$ с более сложной формулой

$$F(R_0, R_I, R_C) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{R+d}{R-d}, & d \leq R \tan \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2} \left[\cot \frac{\theta}{2} \log \left(\frac{R}{r} \cos \theta \right) + \log \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right], & d > R \tan \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$R = \max(R_C, R_I), r = \min(R_C, R_I), d = R_0 - R_C, \theta = \arcsin \frac{R-r}{d}.$$

В пробном случае $\Omega = D(a, r)$ где $0 < a < r$, это неравенство упрощается до

$$|f'| \leq \frac{r(r+a)}{r-a}$$

(точная оценка)



Для оценки производной **снизу** достаточно двух радиусов R_0, R_I . А именно (Donohue 2021):

(Donohue 2021):

$$|f'| \geq R_o \frac{\theta \cos \theta}{2\alpha \cot \alpha}$$

где $\theta = \arcsin\left(\frac{R_I}{R_O}\right)$ и $\alpha = \frac{2\pi\theta}{\pi+2\theta}$

Равенство достигается для подрезанного круга.



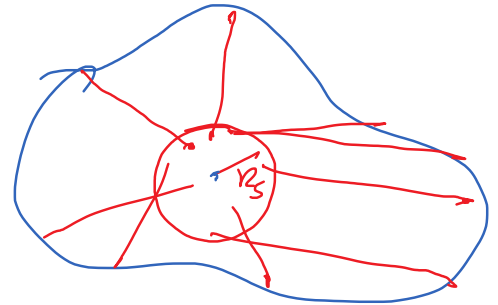
Звездообразные области

Для звездообразных областей вписанный радиус R_I нужно заменить на "радиус звездообразности" R_S определённый так: область Ω звездообразна относительно каждой точки круга $D(0, R_S)$.

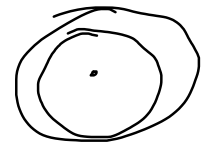
Вид верхней оценки при этом не меняется: Donohue (2021) получил $|f'| \leq R_C \exp(2F(R_O, R_S, R_C))$

вместо R_I

Равномерной нижней оценки в этом случае нет.



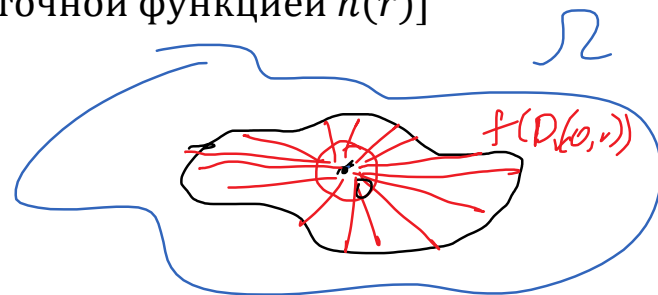
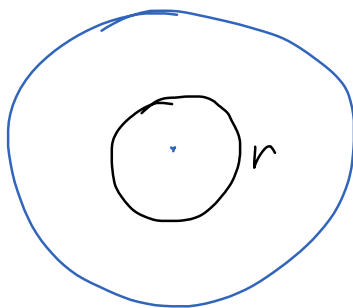
Более общие (без звездообразности), но менее точные, оценки подобного вида получены в статье Gallardo-Gutiérrez & Pommerenke. *On geometric estimates for univalent functions*. Ann. Mat. Pura Appl. (2021).



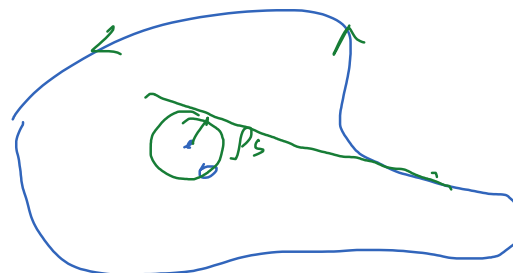
Вопрос на несколько другую тему: вспомним про радиусы выпуклости и звездообразности в классе S

$\rho_C = 2 - \sqrt{3} \approx 0.267$ и $\rho_S = \tanh(\pi/4) \approx 0.655$

Есть ли результат такого вида: при $0 < r < \rho_S$ образ круга $D(0, r)$ звездообразен относительно $D(0, h(r))$? [с точной функцией $h(r)$]



$\rho_S = \inf \{ \text{dist}(0, L) \}$



$$\rho_s = \inf \{ \text{dist}(0, L) \}$$

