МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Дальневосточный центр математических исследований

V-олимпиада по математическому анализу и алгебре
для студентов 1 курса бакалавриата
2026 год

Задача 1. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$? Запишите уравнение этой касательной.

Задача 2. Пусть $f(x)$ –многочлен с целыми коэффициентами,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i},$$

такой, что $f(2) = 0$ и $a_i > -2$ для всех i, $0 \le i \le n$. Доказать, что для любого m, $0 \le m \le n$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{m} a_i 2^{n-i} \le 0.$$

Задача 3. Пусть $n \ge 2$ — натуральное число. Решить уравнение

$$\sqrt{2x(x-2)+3} + 2\sqrt[3]{3x(x-2)+4} + \ldots + (n-1)\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2x(x-2)+3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3x(x-2)+4}} + \ldots + \frac{n-1}{\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1}}.$$

Задача 4. Пусть $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, $d \ne 0$, $a_n \ne 0$ для всех n. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right).$$

Задача 5. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \times n$, все элементы которой — целые числа, кратные 2026. Докажите, что все целые собственные значения матрицы A также кратны 2026.

Задача 6. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) лежат на разных координатных осях декартовой системы координат. Известно, что $AC = 3$ и $BC = 4$. Выведите уравнение геометрического места точек C в данной системе координат.

Задача 7. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+k^2}-k}{n^2+k^2}.$$

**Каждая задача оценивается одинаково в 5 баллов.*