Решение заданий заключительного этапа
олимпиады по математике им. Г.К. Пака
19 декабря 2021 г.
8 класс

1. На зарплату курьерам фирма выделяет 100000 руб, все работники получают поровну. Директору фирмы посоветовали сократить численность курьеров на 50%, а зарплату каждого повысить на 50%. Выгодно ли это предложение для директора? Как изменятся затраты фирмы на содержание курьеров?

Решение. Если курьеров было x, то каждый получал $\frac{100000}{x}$ рублей. Если курьеров станет $\frac{x}{2}$, а жалование каждого курьера станет $\frac{100000}{x} \cdot 1{,}5$ рублей, то затраты директора станут $\frac{100000}{x} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{x}{2} = 75000$ рублей. Затраты сократятся на 25000 рублей.

Ответ. Затраты сократятся на 25 %.

2. Для шифра простой замены используется следующая таблица:

Исх. символ	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
Заш. символ	Б	В	Г	Д	Е	А	З	И	К	Л	М	Ж	О	П	Р

Исх. символ	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ь	Ы	Э	Ю	Я
Заш. символ	С	Т	Н	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	У	Ь	Ы	Э	Ю	Я	Щ

При шифровании верхний символ заменяется на нижний. Для усложнения работы криптоаналитика применили многократное шифрование, т.е. зашифровали ранее полученный шифртекст с помощью того же ключа. Найти наименьшее число повторных шифрований, при котором эта процедура не имеет смысла.

Ответ: 6

Решение. Заметим, что после шестикратного применения шифра каждый символ вернется на свое место и шифртекст совпадет с исходным открытым текстом.

3. У семьи Ивановых есть огород размерами 20×20 м^2, разделённый на квадратные грядки размером 1×1 м^2. Отец Иванов предложил сыну Иванову сыграть в следующую игру. Они по очереди вскапывают по одной новой грядке так, чтобы вскопанные грядки не образовывали уголки. Если кому-то из них не осталось ходов, то он проигрывает и вскапывает все оставшиеся грядки. Каким по счёту и как нужно играть в такую игру сыну Иванову, чтобы выиграть у отца?

Решение. Так как квадрат имеет чётные стороны, то его центром будет угловая точка. Начинать вскапывать нужно вторым по счёту, повторяя ходы отца симметрично центра квадрата. Если отец может вскопать грядку так, чтобы не образовывалось уголков, то и сын может повторить ход отца симметрично центра, так как соответствующая грядка ещё не была вскопана.

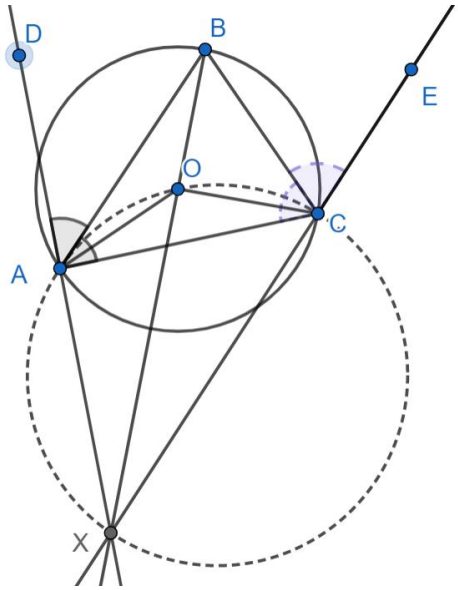
4. На турнире по быстрым шахматам Петя Огурцов в первый день выиграл половину партий. Во второй день турнира он сыграл 4 партии, во всех одержал победу и по результатам двух дней турнира он выиграл 70% партий. Какое наименьшее число

партий Петя мог сыграть в заключительном третьем туре и сколько партий он при этом выиграл, если по результатам турнира он выиграл 80% партий.

Решение. Пусть в первый день Петя сыграл n партий. Тогда выиграл он $0{,}5n$ партий. За два турнира Петя сыграл n+4 партии из них выиграл 0,5n+4 партии. Следовательно, $\frac{0{,}5n+4}{n+4} = 0{,}7$ и n=6, т.е. за два тура Петя сыграл 10 партий, из них выиграл 7 партий. Пусть в третьем туре Петя сыграл x партий, из которых выиграл y партий. Тогда после третьего тура Петя сыграл x+10 партий, из которых выиграл y+7 партий. Таким образом, $\frac{y+7}{x+10} = 0{,}8$, x=5, y=5.

Ответ: в третьем туре Петя сыграл 5 партий, из которых выиграл 5.

5. Дан остроугольный треугольник ABC. O — центр его описанной окружности. Прямая, симметричная AC относительно AB и прямая, симметричная AC относительно BC, пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на прямой BO.



Решение. Докажем, что $\angle XOB = 180°$. Так как прямые DA и EC симметричны AC, то $\angle DAB = \angle BAC, \angle BCE = \angle BCA$. Пусть $\angle DAB = \angle BAC = \alpha, \angle BCE = \angle BCA = \gamma$.

$$\angle AXC = 180° - \angle CAX - \angle ACX$$
$$= 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\gamma) =$$
$$= 2\alpha + 2\gamma - 180°.$$

Вписанный угол $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \beta$, откуда, $\angle AOC = 2\beta$ и $\angle AXC + \angle AOC = 2\alpha + 2\gamma - 180° + 2\beta = 180°$ (т. к. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). Значит, AOCX – вписанный четырехугольник.

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha.$$
$$\angle XOC = \angle XAC = 180° - 2\alpha.$$

Тогда $\angle XOB = \angle XOC + \angle BOC = 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180°$. Значит, точка O лежит на прямой BX.

9 класс

1. Два различных числа таковы, что квадрат разности их кубов равен кубу разности их квадратов. Докажите, что одно из чисел равно 0.

Решение. По условию $(a^3 - b^3)^2 = (a^2 - b^2)^3$. Откуда

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2 = (a-b)^3(a+b)^3;$$
$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2 - (a-b)^3(a+b)^3 = 0;$$
$$(a-b)^2((a^2+ab+b^2)^2 - (a-b)(a+b)^3) = 0;$$
$$(a-b)^2 = 0 \text{ или } (a^2+ab+b^2)^2 - (a-b)(a+b)^3 = 0.$$

По условию числа различны, значит $a - b \neq 0$.

$$(a^2+ab+b^2)^2 - (a-b)(a+b)^3 = 2b^4 + 3a^2b^2 + 4ab^3 = 0;$$
$$b^2(2b^2 + 3a^2 + 4ab) = 0;$$
$$b^2 = 0 \text{ или } 2b^2 + 3a^2 + 4ab = 0;$$

$$2b^2 + 3a^2 + 4ab = 2(a^2 + 2ab + b^2) + a^2 = 0;$$
$$2(a+b)^2 + a^2 = 0.$$

Сумма квадратов равна нулю только когда каждое из чисел равно нулю, т.е.

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Тогда $a = b = 0$, что противоречит условию.

Остается случай, $b^2 = 0$. Тогда $b = 0$. Доказано.

2. Найти минимальное значение $\frac{b}{2a}$, если a и b удовлетворяют соотношению $3a^2 - 12a + 4b^2 - 4b + 1 = 0$.

Решение. Пусть $\frac{b}{2a} = k$, т.е. $b = 2ak$. Тогда $3a^2 - 12a + 16a^2k^2 - 8ak + 1 = 0$, что равносильно $(3 + 16k^2)a^2 - 2(6 + 4k)a + 1 = 0$. Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$D = (6 + 4k)^2 - (3 + 16k^2) = 48k + 33 \geq 0.$$

Следовательно, $k \geq -\frac{11}{16}$ и наименьшее значение k равно $-\frac{11}{16}$.

Ответ: $k = -\frac{11}{16}$.

3. Для шифра простой замены используется следующая таблица:

Исх. символ	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П
Заш. символ	Б	В	Г	Д	Е	А	З	И	К	Л	М	Ж	О	П	Р

Исх. символ	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ь	Ы	Э	Ю	Я
Заш. символ	С	Т	Н	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	У	Ь	Ы	Э	Ю	Я	Щ

При шифровании верхний символ заменяется на нижний. Для усложнения работы криптоаналитика применили многократное шифрование, т.е. зашифровали ранее полученный шифртекст с помощью того же ключа. Найти наименьшее число повторных шифрований, при котором эта процедура не имеет смысла.

Ответ: 6

Решение. Заметим, что после шестикратного применения шифра каждый символ вернется на свое место и шифртекст совпадет с исходным открытым текстом.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения

$$x^2 + y^2 = 7 + xy,$$

получим

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 49 + 2xy + x^2y^2,$$

$$91 = x^4 + x^2y^2 + y^4 = 49 + 2xy;$$

$$xy = 3;$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82; \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$(x^2 - y^2)^2 = 64;$$

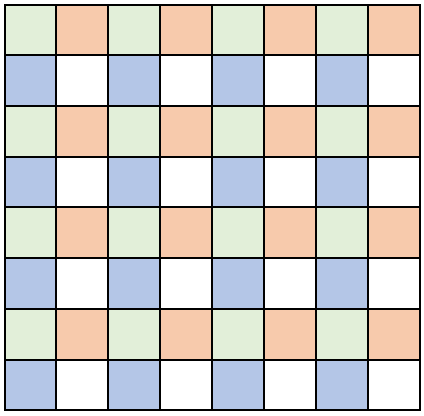
$$x^2 - y^2 = 8;$$

$$x^2 = 9;\ \ x = \pm 3;\ \ y = \pm 1.$$

Ответ: (3; 1), (1; 3), (–3;–1), (–1;–3).

5. На шахматную доску село N бабочек. Оказалось, что каждая бабочка сидит внутри одной клетки и никакие две бабочки не сидят внутри одной клетки вместе. Докажите, что существует не менее N/4 бабочек со следующим свойством: любые две бабочки не находятся в соседних по стороне и по углу клетках.

Доказательство. Заменим шахматную раскраску на четырёхцветную:

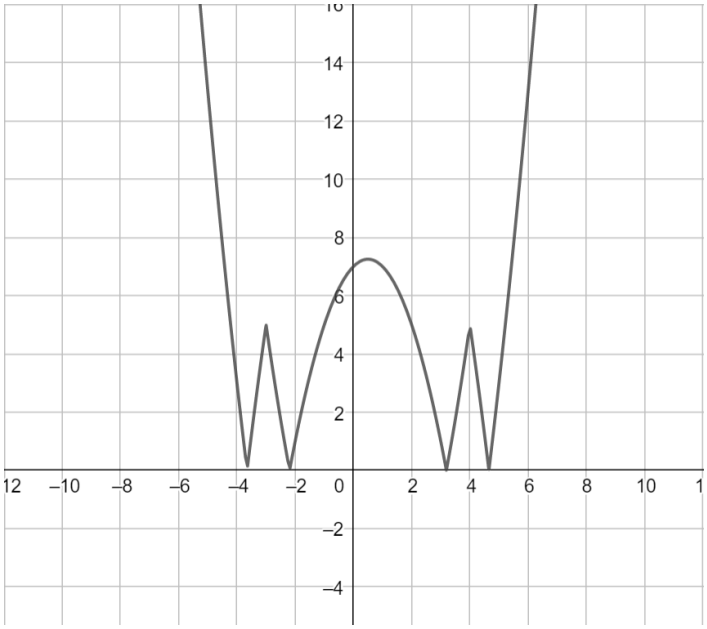


Среди N клеток с бабочками найдётся не менее N/4 клеток одинакового цвета, которые не граничат друг с другом по стороне и по углу.

10 класс

1. Постройте график функции $y = \left|5 - |x^2 - x - 12|\right|$. Определите при каких значениях параметра a уравнение $\left|5 - |x^2 - x - 12|\right| = a$ имеет 8 корней.

Решение. График функции приведен ниже. Из графика видно, что 8 корней будет при $a \in (0; 5)$.



2.У Нео есть 9 USB-флешек объёмом от 2 до 10 гигабайт (каждая флешка вмещает целое количество гигабайт) и три переходника, каждый из которых имеет три USB-входа. Суммарный объём флешек, подключенных к одному переходнику, должен быть меньше 20 гигабайт. Если объём одной флешки в каком-то переходнике делится на объём другой флешки в этом переходнике, то переходник перегорает. Переходник нельзя вставлять в другой переходник.

Нео хочет подключить сразу все 9 флешек к компьютеру, вставляя их в переходники, чтобы скопировать информацию. Может ли он это сделать?

Решение. Заметим, что флешки с объёмом 8, 9 и 10 гигабайт должны быть подключены в разные переходники:

- если подключить вместе флешки на 9 и 10 гигабайт или на 8 и 10 гигабайт, то в этот переходник больше ничего из оставшихся флешек подключить нельзя и для какой-то флешки не останется места,
- если подключить вместе флешки на 8 и 9 гигабайт, то третья флешка для этого переходника имеет объём 2 гигабайта – переходник сгорит.

Перебором восстанавливается единственный возможный случай подключения флешек к переходникам:

1 переходник: 8, 6, 5,

2 переходник: 9, 2, 7,

3 переходник: 10, 4, 3.

3. Решить уравнение $12x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$.

Решение. Следующие уравнения равносильны:

$$12x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0,$$
$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 4x^3 = 0,$$
$$(2x - 1)^3 = -4x^3.$$

Следовательно, $2x - 1 = -\sqrt[3]{4}x$.

Ответ: $x = \frac{1}{2+\sqrt[3]{4}}$.

4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = AD$, вписан в окружность. Зная длину $a = AC$ и угол $\alpha = \angle BAD$, вычислите $BC + CD$.

Решение. На прямой CD за точкой D сделаем засечку F, для которой $DF = BC$. Тогда $\Delta ADF = \Delta ABC$ по двум сторонам $AD = AB$, $FD = BC$и углу между ними $\angle ADF = 180^0 - \angle ADC = \angle ABC$, другими словами. ΔADF получается поворотом треугольника ABC вокруг точки A по часовой стрелке на угол α. Отсюда, $\angle DAF = \angle BAC$, $\mathrm{CAF} = \mathrm{BAD} = \alpha$. Треугольник ACF – равнобедренный, $\frac{1}{2}CF = a\,sin\frac{\alpha}{2}$. С другой стороны, $CF = CD + DF = BC + CD$.

Ответ. $BC + CD = 2a\,sin\frac{\alpha}{2}$.

5. Для того, чтобы пройти идентификацию, необходимо указать набор из трех натуральных чисел (a, b, c). Числа a, b должны попадать в диапазон от 10 до 20 включительно. Кроме того, указанные числа должны удовлетворять следующему условию:

$$5a^2 - 3b^2 - 7c = 98.$$

Найдите все возможные наборы чисел.

Решение. Так как $5a^2 - 3b^2 = 7c + 98$, несложно заметить, что $5a^2 - 3b^2$ делится на семь. Перебором всех возможных случаев получается ответ.

Ответ: (17, 13, 120), (17, 15, 96), (17, 20, 21), (18, 13, 145), (18, 15, 121), (18, 20, 46), (12, 10, 46), (12, 11, 37), (15, 16, 37), (14,14, 42), (16,10, 126), (16,17, 45), (16, 18, 30), (19,17, 120), (19, 18, 105), (20, 12, 210), (20,16,162), (20, 19, 117).